Université de Haute-Alsace
2022/2023
Maths Renfort CPB1
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 3 : Fonctions continues

Au lycée, on vous a donné l'idée de la continuité en disant qu'une fonction est continue si on peut tracer son graphe "sans lever le stylo". L'objectif de ce chapitre est de donner la vraie définition rigoureuse de la notion de continuité, ainsi que les résultats principaux qui en découlent et qui font de cette notion une notion essentielle.

Peut-être avez vous déjà vu la définition de la continuité avec des suites : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si pour toute suite (u_n) convergeant vers x_0, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$. On va aussi voir le lien entre la définition que l'on va donner et celle-ci.

Sur un dessin, on voit que f est continue si "un petit déplacement horizontal induit un petit déplacement vertical". On va formaliser ceci.

1 Rappels sur les limites de fonctions

1.1 Limites en un point

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

Définition 1

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f **a pour limite** l **en** x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ou bien $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$.

Remarque. Contrairement aux suites, où n ne pouvait tendre que vers $+\infty$, ici x peut tendre vers n'importe quel réel ou vers $\pm\infty$. Il est donc utile de préciser vers quoi tend x dans les notations.

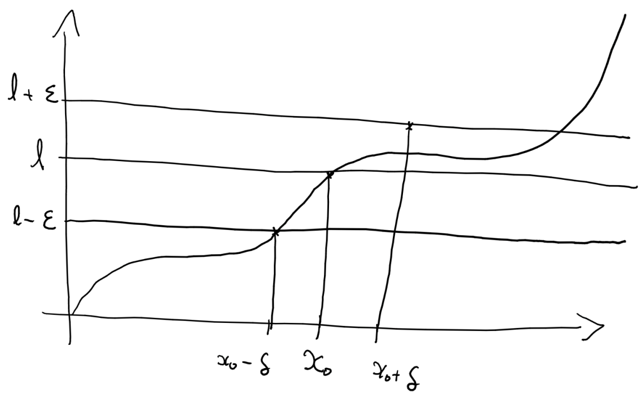


Figure 1 – Convergence d'une fonction en x_0

Exemples :

1. $f(x) = x^2 \Longrightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} x_0^2$.
2. Fonction partie entière : n'admet pas de limite aux points entiers.

On considère maintenant des fonctions définies sur un intervalle de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b]$. On note I un tel intervalle. Par exemple, pensez à $\frac{1}{x}$ qui est définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Définition 2

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si :
$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A;$$
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si :
$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A.$$

Exercice : faire un dessin (comme ci-dessus) avec $\frac{1}{x}$.

1.2 Limites en l'infini

On regarde maintenant des fonctions définies sur $I =]a, +\infty[$.

Définition 3

- Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad x > B, \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon;$$
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :
$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad x > B \Longrightarrow f(x) > A.$$

Exercice : adaper cette définition en jonglant avec $+\infty$ et $-\infty$.

Exemple utile : on prend deux fonctions polynomiales à coefficients réels

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0;$$
$$Q(x) = b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0, \qquad b_j \in \mathbb{R}, b_m \neq 0$$

Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n > m; \\ \frac{a_n}{b_m} \text{ si } n = m; \\ 0 \text{ si } n < m. \end{cases}$$

1.3 Limites à gauche, à droite

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I =]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 4

- On appelle **limite à droite** de f en x_0 la limite en x_0 de la fonction $f|_{]x_0,b[}$, notée $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$.
- On appelle **limite à gauche** de f en x_0 la limite en x_0 de la fonction $f|_{]a,x_0[}$, notée $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$.

Exercice : traduire ces définitions avec des ε et des δ.

Exemple : si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

1.4 Propriétés des limites

Ce sont les mêmes résultats que pour les suites, à peu de choses près. Voici un catalogue de résultats, donnés sans démonstrations :

1. La limite est unique ;
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}, f, g : I \to \mathbb{R}$. On a $\lim(\lambda f) = \lambda \lim f(x)$; $\lim(f+g) = \lim(f) + \lim(g)$, $\lim(fg) = \lim(f)\lim(g)$;
3. Si $\lim(f) \neq 0$, alors $\lim \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim(f)}$;
4. Si $\lim(f) = \pm\infty$, alors $\lim \frac{1}{f} = 0$;
5. Soient f, g composables. Si $\lim\limits_{x_0}(f) = l$ et $\lim\limits_{l}(g) = l'$, alors $\lim\limits_{x_0}(g \circ f) = l'$.
6. Les théorèmes de comparaison sont adaptables de ceux des suites.

2 Continuité en un point

2.1 Définitions et propriétés

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Voici la "vraie" définition de la continuité :

Définition 5

- Soit $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en** x_0 si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
(ie : f admet $f(x_0)$ pour limite en x_0).
- Si f est continue en tout point de I, on dit que f est **continue sur** I.

Exemples de fonctions continues :

1. Les fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$;
2. les fonctions sinus, cosinus, arccos, arcsin ;
3. la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction logarithme ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. **Contrexemple :** la fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle l'est en revanche sur chaque intervalle de type $[k, k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$.

La continuité permet de déduire de nombreuses propriétés intéressantes pour une fonction. Par exemple, si f est continue et non nulle en un point x_0, alors elle sera également non nulle "autour" de x_0 (voir le lemme ci-dessous). De même, si f est continue et prend des valeurs positives puis négatives, alors on est assuré qu'elle passe à un moment par 0.

Lemme 6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Démonstration. Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$. On écrit la continuité de f en x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Cela signifie que

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Longrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Choisissons ε tel que $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Ainsi, on obtient un δ tel que $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow 0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x)$. Donc f est bien non nulle dans un intervalle de taille 2δ autour de x_0. $\square$

Proposition 7

Soient f, g continues en $x_0 \in I$. Alors :

1. Pour tout réel λ, la fonction λf est continue en x_0, ainsi que $f + g$;
2. Soient f, g continues en x_0 et supposons $f(x_0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

Proposition 8

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

2.2 Prolongement par continuité

Si on dispose d'une fonction continue partout sauf en certains points isolés, on voudrait définir une nouvelle fonction continue partout et égale à la première sur tous ses points de continuité.

Définition 9

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$, $f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

- On dit que f est **prolongeable par continuité en** x_0 si f admet une limite finie en x_0, notée l.
- On définit alors la fonction

$$\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \setminus \{x_0\} ; \\ l \text{ si } x = x_0. \end{cases}$$

Exemple :

Prenons $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$, continue sur $\mathbb{R}^*$. Comme $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On définit alors

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0; \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

2.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

On va faire le lien entre la définition de la continuité que l'on a vue et celle avec les suites, qui a été citée en introduction.

Proposition 10

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Alors :

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \text{ pour toute suite } u_n \to x_0, \text{ on a } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0).$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons f continue en x_0 et considérons une suite u_n qui converge vers x_0. Montrons que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists \delta > 0, \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pour ce δ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Longrightarrow |u_n - x_0| < \delta$. Ainsi, pour $n \geq N$, $|u_n - x_0| < \delta$, donc $|f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Finalement $f(u_n) \to f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Raisonnons par contraposée. Supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'il existe alors une suite u_n qui tend vers x_0 mais telle que $f(u_n)$ ne tend **pas** vers $f(x_0)$. Ecrivons que f n'est pas continue en x_0 :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \text{ tel que } |x - x_0| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon_0.$$

On construit maintenant une suite (u_n) : on choisit $\delta = \frac{1}{n}$ et on obtient l'existence de u_n tel que $|u_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0$, pour chaque $n > 0$. Alors, la suite (u_n) tend vers x_0, mais $f(u_n)$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$.

$\square$

Cette caractérisation est importante pour l'étude des suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, qui seront étudiées en maths renfort S3.

3 Le théorème des valeurs intermédiaires

3.1 Le théorème

Théorème 11

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur le segment $[a,b]$. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

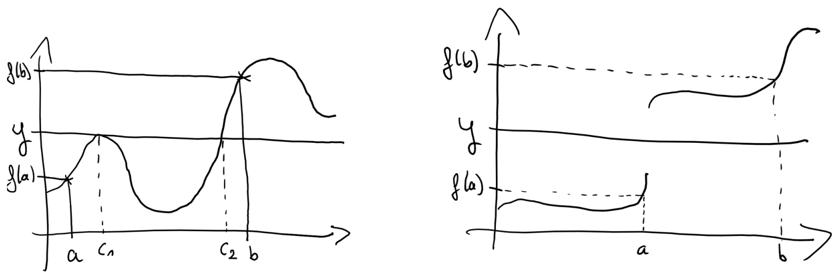
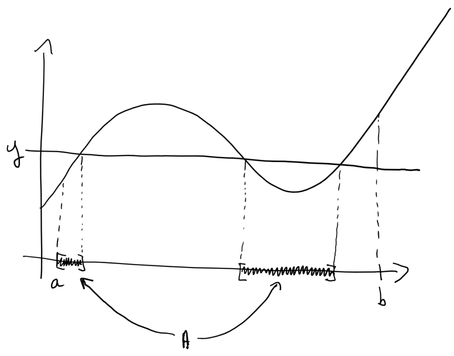


Figure 2 – Sur ces exemples, on voit qu'il n'ya pas unicité (graphe 1) et que si la fonction n'est pas continue, le théorème est faux (graphe 2).

Démonstration. Montrons le théorème dans le cas $f(a) < f(b)$. Soit $f(a) \leq y \leq f(b)$. Montrons que y admet un antécédent par f.

Etape 1 : On introduit l'ensemble $A = \{x \in [a,b], f(x) < y\}$. A est non vide ($a \in A$) et est majoré (par b). Il admet donc une borne supérieure, notée $c := \sup(A)$. On va montrer que $f(c) = y$.



Etape 2 : Montrons que $f(c) \leq y$. Comme $c = \sup(A)$, il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers c. On a donc $f(u_n) \leq y$ par définition de A. Comme f est continue en c, $f(u_n) \to f(c)$. Donc $f(c) \leq y$ par passage à la limite.

Etape 3 : Montrons que $f(c) \geq y$. Si $c = b$, alors $f(c) = f(b) \geq y$. Sinon, soit $x \in]c,b]$. Comme $c = \sup(A)$, $x \notin A$ donc $f(x) > y$. Or, f est continue en c, donc f admet une limite à droite en c qui vaut $f(c)$. Ainsi, $f(c) \geq y$. Finalement, $f(c) = y$.

$\square$

3.2 Applications du théorème

Vous êtes sûrement familiers avec la version suivante du théorème :

Corollaire 12

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur un segment. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

C'est une application directe du théorème avec $y = 0$ L'hypothèse $f(a)f(b) < 0$ indique que f change de signe entre a et b.

Exemple : Si P est un polynôme de degré impair, alors P possède (au moins) une racine. En effet, si l'on suppose que le coefficient dominant de P est positif, alors $\lim\limits_{-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P(x) = +\infty$. Le corollaire permet de conclure.

Remarque. Si on rajoute au corollaire l'hypothèse "f monotone", on obtient l'unicité de la racine de f. C'est probablement cette version que vous avez vu au lycée.

Le théorème peut aussi s'énoncer d'une manière théorique de la façon suivante :

Corollaire 13

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle

Remarque. Attention ! $f([a,b]) \neq [f(a), f(b)]$ en général !

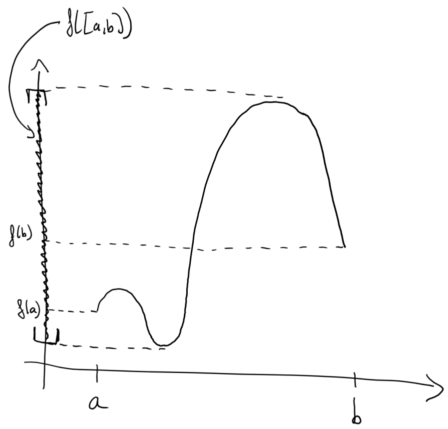


FIGURE 3 – Illustration de la remarque

Démonstration. Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 \leq y_2$. Montrons que $y \in [y_1, y_2] \implies y \in f(I)$. Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Ainsi, $y \in [f(x_1), f(x_2)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$, donc $y \in f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle. □

3.3 Fonctions continues sur un segment

Théorème 14

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que

$$f([a, b]) = [m, M].$$

(Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment).

Démonstration. Cette preuve est un peu longue mais ça vaut le coup d'y jeter un oeil.

1. Montrons que f est bornée. Si $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = \{x \in [a, b], f(x) \leq r\}$. On choisit r tel que $A_r \neq \emptyset$. Comme $A_r \subset [a, b]$, le nombre$s := \sup(A_r)$ existe. Prenons une suite x_n d'éléments de A_r qui converge vers s. Par définition, $f(x_n) \leq r$ donc comme f est continue, $f(s) \geq r$ et donc $s \in A_r$. Ainsi, $\sup(A_r) \in A_r$.
   Supposons par l'absurde que f soit non bornée. Alors pour tout n entier naturel, A_n est non vide. On note $s_n = \sup(A_n)$. On a $A_{n+1} \subset A_n$, car $f(x) \geq n + 1 \Rightarrow f(x) \geq n$. On a ainsi $s_{n+1} \leq s_n$, donc s_n décroît et est minorée par a. Elle converge donc vers $l \in [a, b]$. Par continuité de f, $f(s_n) \longrightarrow f(l)$. Mais $f(s_n) \geq n$, donc $\lim\limits_{+\infty} f(s_n) = +\infty$, **contradiction** avec $f(s_n) \longrightarrow f(l)$. Ainsi, f est majorée. On montre de même que f est minorée, donc bornée. On a à ce stade montré que $f(I)$ est un intervalle borné. Il faut encore montrer que les bornes sont atteintes.
2. Montrons que $f(I)$ est un intervalle fermée, *ie* que f atteint ses bornes. Notons $m = \inf(f(I))$ et $M = \sup(f(I))$. Supposons par l'absurde que $M \notin f(I)$. Ainsi, $\forall t \in [a, b]$, $M > f(t)$. On peut donc définir

   $$g : x \longmapsto \frac{1}{M - f(x)},$$

   continue sur I, donc bornée par le point 1. Notons cette borne $K : \forall x \in I$, $|g(x)| \leq K$. Cependant, il existe $y_n \longrightarrow M$ car $M = \sup(f(I))$, et $y_n \in f(I)$. Il existe donc x_n tel que $y_n = f(x_n)$, et donc $f(x_n) \longrightarrow M$. Ainsi, la suite $(g(x_n))$ tend vers $+\infty$, or g est bornée, **contradiction** ! Donc $M \in f(I)$. De même, on montre que $m \in f(I)$.

Conclusion : $f(I) = [m, M]$. □

4 Exercices

Exercice 1 :

1. Montrer que toute fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $+\infty$;
2. Montrer que toute fonction croissante majorée admet une limite en $+\infty$.

Exercice 2 :

Peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes ?

1. $f(x) = \sin(x)\sin(1/x)$;
2. $g(x) = \frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}$;
3. $h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

Exercice 3 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$. On dit que x_0 est un **point fixe** de f si $f(x_0) = x_0$.

1. Comment peut-on traduire graphiquement le fait que f admette un point fixe ?
2. Montrer que si f est continue, alors f admet un point fixe. (Poser $h(x) = f(x) - x$).
3. Trouver une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ décroissante sans point fixe.
4. Montrer que si $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est croissante, alors elle admet un point fixe. *Indication :* Considérer $A := \{x \in [0,1], g(x) \geq x\}$ et montrer que le sup de A (existence ?) est un point fixe de g.

Exercice 4 :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = f(b)$. On pose $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$.

1. Montrer que g s'annule en au moins un point de l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$.
2. Application : une personne parcourt 4km en 1h. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 minutes durant lequel elle parcourt exactement 2km.

Exercice 5 :

Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est constante égale à 1 ou -1.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Les bornes sont-elles forcément atteintes ?

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que $f(x) = f(2x)$ pour tout x réel. Montrer que f est constante. *Indication :* Montrer que pour tout x, on a l'égalité $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$.